

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2018-2019

Prova scritta in aula del 23.09.2019

Parte II - Testo 1

CdS Edilizia ☐

CdS AdC ☐

CdS SdA ☐

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui solli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1** (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $C$ ,  $M_C$ .

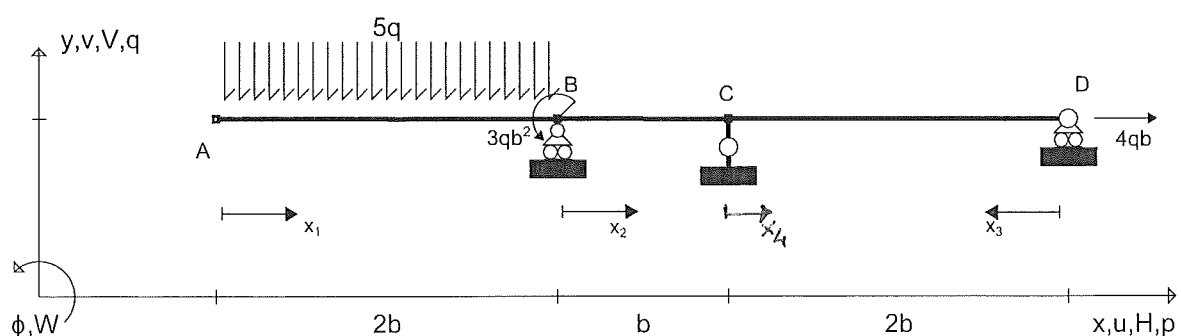
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento verticale del punto  $A$ ,  $v_A$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 23.09.19\*001



## Esercizio n. 2 (7 punti)

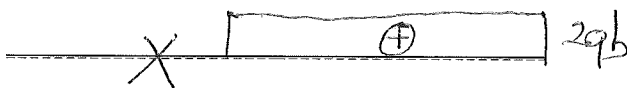
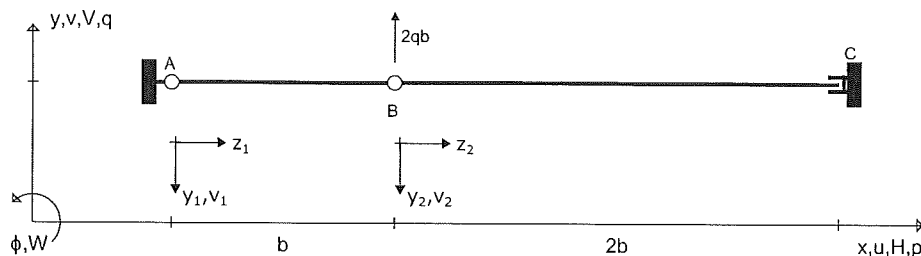
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti *A*, *B* e *C*.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

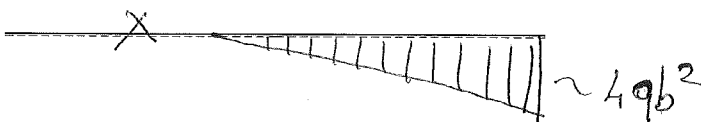
1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. Lo spostamento verticale del punto *B*,  $v_B$ ;
4. La rotazione del punto *A*,  $\theta_A$ .

Università' di Cagliari

SdC\_SdA 23.09.19\*001



$\uparrow (+)$



$\uparrow (+)$

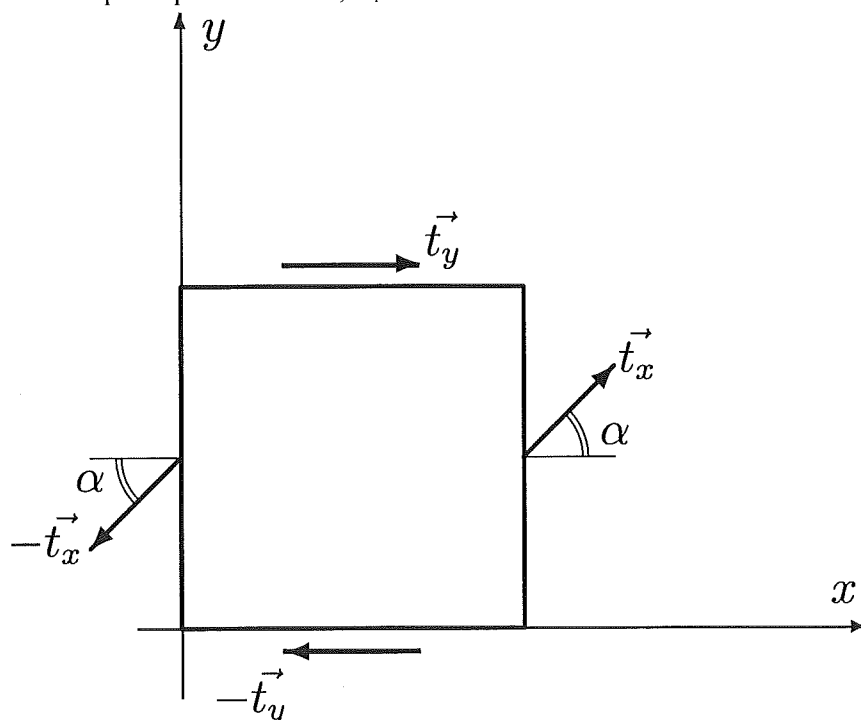
$H_A (\Rightarrow) = \dots 0 \dots$	$V_A (\uparrow) = \dots 0 \dots$	$V_C (\uparrow) = \dots -2qb \dots$	$M_C (\curvearrowright) = \dots 4qb^2 \dots$
$N_{AB} = \dots 0 \dots$	$T_{AB} = \dots 0 \dots$	$M_{AB} = \dots 0 \dots$	
$N_{BC} = \dots 0 \dots$	$T_{BC} = \dots 2qb \dots$	$M_{BC} = \dots 2qbz_2 \dots$	
c.c in A = $\dots \left. \frac{v_1}{z_1} \right _{z_1=0} = 0 \dots$			
c.c in B = $\dots \int v_1(z_1=b) = v_2(z_2=0) \dots$			
c.c in C = $\dots \left. \begin{aligned} v_2(z_2=2b) &= 0 \\ v_2'(z_2=2b) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots$			
$v_1(z_1) = \dots \frac{16}{3} \frac{qb^3 z_1}{EI} \dots$	$v_1'(z_1) = \dots -\frac{16}{3} \frac{qb^3}{EI} \dots$		
$v_2(z_2) = \dots -\frac{16}{3} \frac{qb^4}{EI} + 4 \frac{qb^3 z_2}{EI} - \frac{qb z_2^3}{3EI} \dots$	$v_2'(z_2) = \dots 4 \frac{qb^3}{EI} - \frac{qb z_2^2}{EI} \dots$		
$v_B = \dots -\frac{16}{3} \frac{qb^4}{EI} (\uparrow) \dots$	$\theta_A = \dots -\frac{16}{3} \frac{qb^3}{EI} (\nwarrow) \dots$		

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$ , rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = +90^\circ$  (sicché  $\cos \alpha = 0$ ;  $\sin \alpha = 1$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 170$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

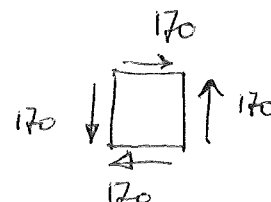
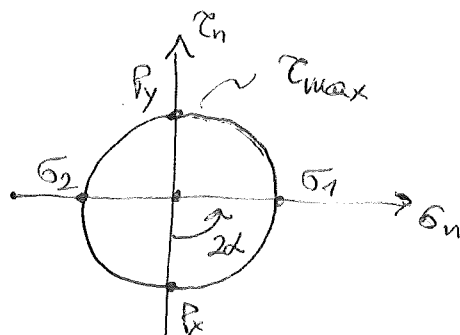
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = \dots\dots\dots 0,0000 \dots \text{ (MPa)}; \sigma_y = \dots\dots\dots 0,0000 \dots \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = \dots\dots\dots +170,0000 \dots \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = \dots\dots\dots 170,0000 \dots \text{ (MPa)}; \sigma_2 = \dots\dots\dots -170,0000 \dots \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = \dots\dots\dots 170,0000 \dots \text{ (MPa)};$$

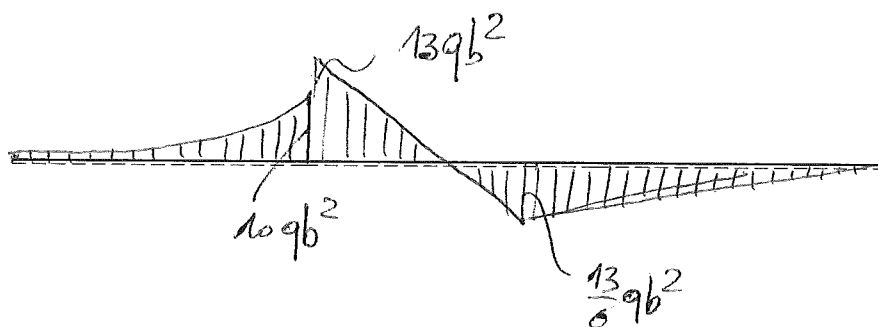
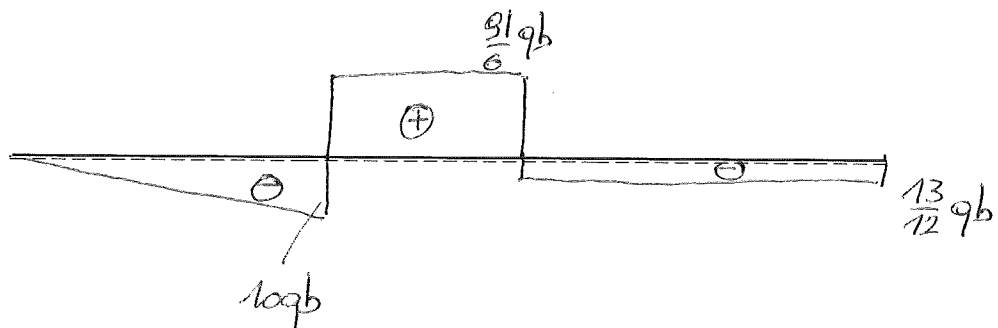
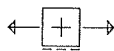
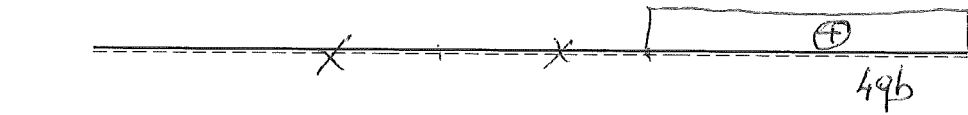
cerchio di Mohr:



$$P_x = (0,0000, -170,0000)$$

$$P_y = (0,0000, +170,0000)$$

$$\varphi = \dots\dots\dots 45^\circ \dots \text{ (}^\circ\text{)};$$



$V_B(\uparrow) = \frac{151}{6}qb$	$H_C(\Rightarrow) = 4qb$	$V_C(\uparrow) = \frac{65}{4}qb$	$V_D(\uparrow) = \frac{13}{12}qb$	$M_C(\curvearrowright) = \frac{13}{6}qb^2$
$N_{AB} = 0$	$T_{AB} = -5qx$	$M_{AB} = -\frac{5}{2}qx^2$		
$N_{BC} = 0$	$T_{BC} = \frac{91}{6}qb$	$M_{BC} = -13qb^2 + \frac{91}{6}qbx_2$		
$N_{DC} = 4qb$	$T_{DC} = -\frac{13}{12}qb$	$M_{DC} = \int \frac{13}{12}qbx_3$		
$v_A = -\frac{323}{18} \frac{qb^4}{EJ}$	(↓)			

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2018-2019

Prova scritta in aula del 23.09.2019

Parte II - Testo 2

CdS Edilizia ☐

CdS AdC ☐

CdS SdA ☐

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1** (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $C$ ,  $M_C$ .

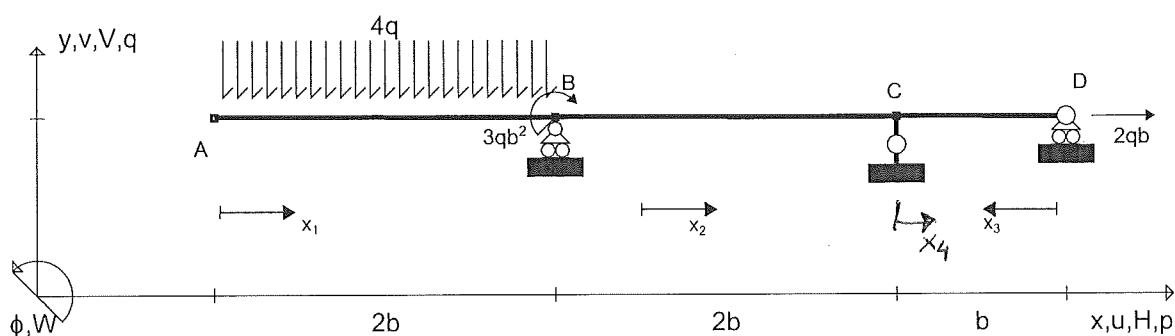
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento verticale del punto  $A$ ,  $v_A$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 23.09.19\*002



## Esercizio n. 2 (7 punti)

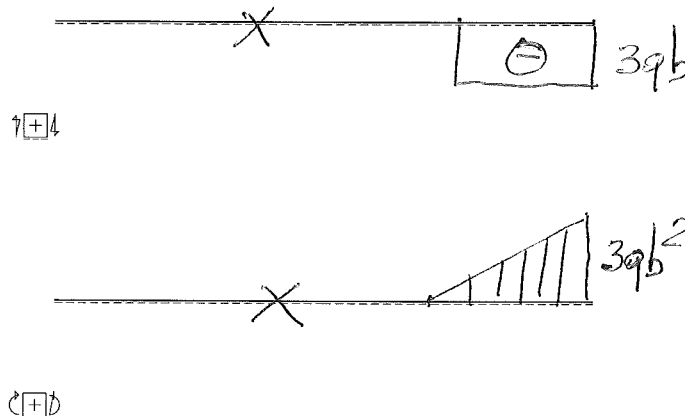
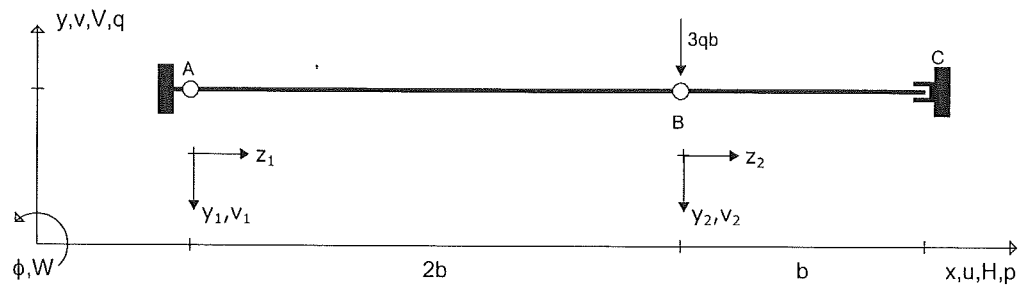
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. Lo spostamento verticale del punto  $B$ ,  $v_B$ ;
4. La rotazione del punto  $A$ ,  $\theta_A$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 23.09.19\*002



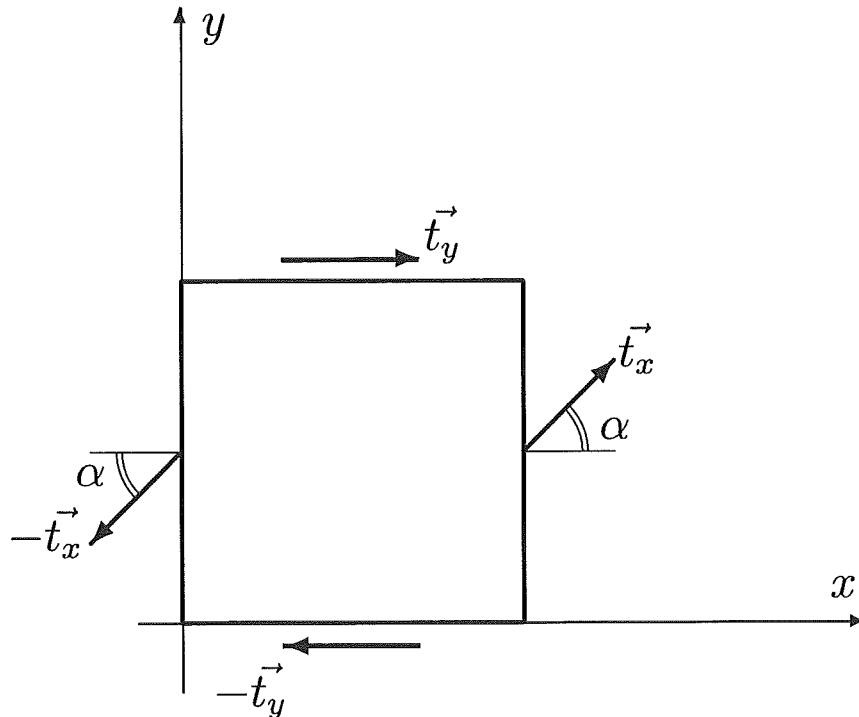
$H_A (\Rightarrow) = 0$	$V_A (\uparrow) = 0$	$V_C (\uparrow) = 3qb$	$M_C (\curvearrowright) = -3qb^2$
$N_{AB} = 0$	$T_{AB} = 0$	$M_{AB} = 0$	
$N_{BC} = 0$	$T_{BC} = -3qb$	$M_{BC} = -3qbz_2$	
c.c in $A = v_1(z_1=0) = 0$ ; c.c in $B = v_1(z_1=2b) = v_2(z_2=0)$ ;			
c.c in $C = \begin{cases} v_2(z_2=b) = 0 \\ v_2'(z_2=b) = 0 \end{cases}$ ;			
$v_1(z_1) = \frac{1}{2} \frac{qb^3 z_1^3}{EI}$	$v_1'(z_1) = \frac{1}{2} \frac{qb^3}{EI}$		
$v_2(z_2) = \frac{qb^4}{EI} - \frac{3}{2} \frac{qb^3 z_2}{EI} + \frac{1}{2} \frac{qb z_2^3}{EI}$	$v_2'(z_2) = -\frac{3}{2} \frac{qb^3}{EI} + \frac{3}{2} \frac{qb z_2^2}{EI}$		
$v_B = \frac{qb^4}{EI}$	$\theta_A = \frac{1}{2} \frac{qb^3}{EI}$		

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$  rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = -90^\circ$  (sicché  $\cos \alpha = 0$ ;  $\sin \alpha = -1$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 340$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

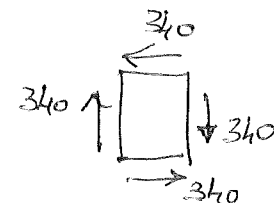
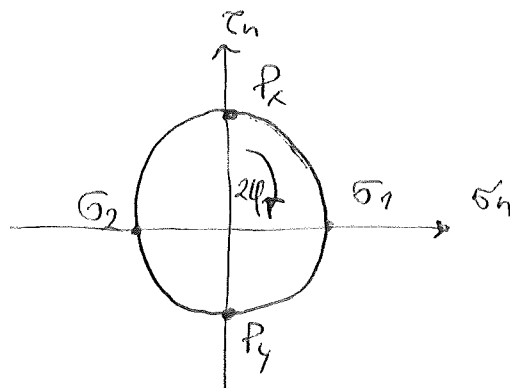
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = 0,0000 \dots \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,0000 \dots \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -340,0000 \dots \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 340,0000 \dots \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -340,0000 \dots \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 340,0000 \dots \text{ (MPa)};$$

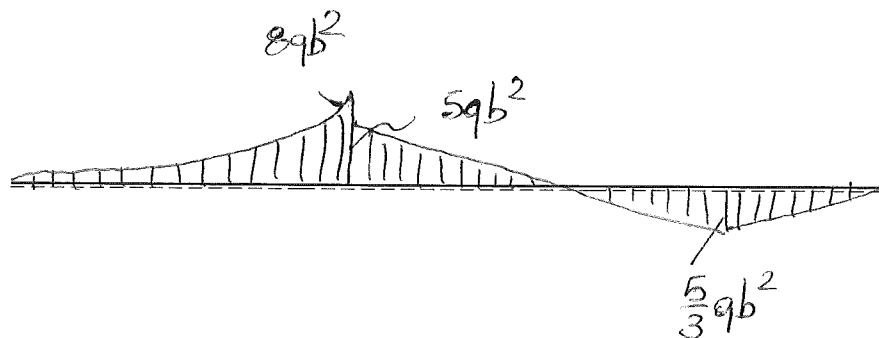
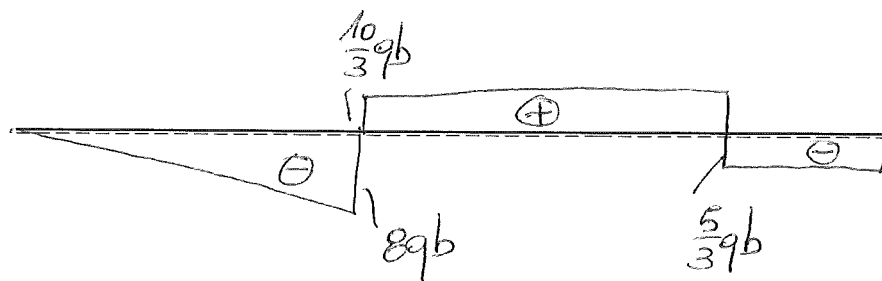
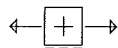
cerchio di Mohr:



$$P_k = (0,0000, +340,0000)$$

$$P_y = (0,0000, -340,0000)$$

$$\varphi = -15,0000 \dots (^\circ);$$



$V_B(\uparrow) = \frac{34}{3}qb$	$H_C(\Rightarrow) = -2qb$	$V_C(\uparrow) = -5qb$	$V_D(\uparrow) = \frac{5}{3}qb$	$M_C(\square) = \frac{5}{3}qb^2$
$N_{AB} = 0$	$T_{AB} = -4qb$	$M_{AB} = -2qb^2$		
$N_{BC} = 0$	$T_{BC} = \frac{10}{3}qb$	$M_{BC} = -5qb^2 + \frac{10}{3}qb^2$		
$N_{DC} = 2qb$	$T_{DC} = -\frac{5}{3}qb$	$M_{DC} = \frac{5}{3}qb^2 - \frac{5}{3}qb^2$		
$v_A = -\frac{122}{9} \frac{qb^4}{EI}$				